第 31 卷第 6 期 大 学 数 学 Vol. 31, №. 6
2015 年 12 月 COLLEGE MATHEMATICS Dec. 2015

一类幂指函数求极限的新认识

邓松海， 杨瑞晗， 魏昊天， 郑洲顺
（中南大学 数学与统计学院，长沙 410083）

［摘 要］通过无穷小量的比较的三种不同的形式，从一个新的视角讨论了一种幂指函数求极限的不定型，得出了简单有用的结论. 根据两个变量趋于零的快慢，即等价无穷小量、同阶无穷小量、高阶无穷小量，来分析极限的结果，当趋于零较慢时，可视为是有限数. 并给出几个计算实例说明这个新方法.

［关键词］极限；幂指函数；不定型
［中图分类号］O172.1 ［文献标识码］C ［文章编号］1672-1454(2015)06-0077-03

1 问题的发现与猜想

形如 $\alpha(x)^{\beta(x)}$ 的函数，称为幂指函数，它既不是幂函数，也不是指数函数. 关于幂指函数求极限的问题，很多文章都有讨论，例如文献[2－3]. 本文从无穷小的阶的角度讨论了 1^{∞} 的几种结果.

在一次课堂上讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 上的证明时，有学生给出如下的解答

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}\log_2 n}=\lim_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{n}}\right)^{\log_2 n}=1^{\infty}=1.$$

结果虽然是正确的，但是很明显该解法只考虑了 $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$ 这个极限，$\lim\limits_{n\to\infty}\log_2 n=+\infty$ 虽然是用极限符号表示，但极限并不存在. 这是个 1^{∞} 型的不定型. 这是一个同时变化的过程，割裂开来分析是不正确的. 这个无穷大量，或者说是“广义极限”，极限的法则有时又是符合的，如 $A\cdot\infty=\infty$（$A\neq 0$ 为实数），$+\infty+(+\infty)=+\infty$，$-\infty-(+\infty)=-\infty$，$\dfrac{A}{\infty}=0$，$\dfrac{\infty}{A}=\infty$，$\infty\times\infty=\infty$，等等. 其中 A 表示一个变量的极限. 这给学生们在学习中带来了些困惑，也让大家产生研究的兴趣.

我们知道，1 的任何有限次幂是 1，如果底数趋于 1 而指数有有限的极限，可以得到结果是 1. 这个 1^{∞} 表示的底数有极限 1，而指数极限不存在，但为 ∞. 在学习了无穷小量后，大家知道极限的问题，可以转换为无穷小量来研究. 我们把两个极限过程，看成是两个极限过程的“同步”的比较. 这种比较，反映了不同的无穷小趋于零的“快慢”. 因而进一步地联想到了底数趋于 1 的“快慢”与指数趋于 ∞ 的“快慢”. 如果底数趋于 1 的速度比指数趋于无穷大的速度快，可以看作是 1 的有限次幂.

设 $\lim\alpha(x)^{\beta(x)}$，其中 $\lim\alpha(x)=1$，$\lim\beta(x)=\infty$，则 $\alpha(x)-1$ 与 $\dfrac{1}{\beta(x)}$ 便是这个极限过程中的两个无穷小量. 如果 $\alpha(x)-1$ 是 $\dfrac{1}{\beta(x)}$ 的高阶无穷小，那么底数趋于 1 的速度比指数趋于无穷大的速度快，这时趋于 1 是主要的，而指数因趋于无穷较慢，可视为有限，可大胆推测 $\lim\alpha(x)^{\beta(x)}=1$；如果 $\alpha(x)-1$ 是 $\dfrac{1}{\beta(x)}$ 的低阶无穷小，那么推测 $\lim\alpha(x)^{\beta(x)}$ 可能是不存在的. 此时，因为 $\dfrac{1}{\beta(x)}$ 是高阶无穷小，即 $\beta(x)\to\infty$ 是占主要因素，视 $\alpha(x)$ 为有限数，当 $\alpha(x)\to 1^{+}$ 时，$\alpha(x)>1$，于是 $(1^{+})^{+\infty}=+\infty$；而 $\alpha(x)\to 1^{-}$

［收稿日期］2015-06-25
［基金项目］中南大学开放式精品示范课堂建设计划项目

时，$0<\alpha(x)<1$，于是$(1^-)^{+\infty}=0$．另外，如果前者是后者的同阶无穷小，则$\lim\alpha(x)^{\beta(x)}$是一个常数.

2 主要结果

基于以上猜想，给出以下形式的定理：

定理1 已知$\lim\alpha(x)=1$，$\lim\beta(x)=\infty$．这里的$\lim$指$\lim\limits_{x\to x_0}$或$\lim\limits_{x\to\infty}$． 记e^{∞}表示$e^{+\infty}=+\infty$，$e^{-\infty}=0$，则有

(i) 若$\lim\dfrac{\alpha(x)-1}{\dfrac{1}{\beta(x)}}=k(\neq 0)$，则$\lim\alpha(x)^{\beta(x)}=e^k$；

(ii) 若$\lim\dfrac{\alpha(x)-1}{\dfrac{1}{\beta(x)}}=0$，则$\lim\alpha(x)^{\beta(x)}=1$；

(iii) 若$\lim\dfrac{\alpha(x)-1}{\dfrac{1}{\beta(x)}}=\infty$，则$\lim\alpha(x)^{\beta(x)}=e^{\infty}$．

证 由条件$\lim\alpha(x)=1$及极限的局部保号性，则在求极限的无限过程中$\alpha(x)>0$，于是

$$\alpha(x)^{\beta(x)}=e^{\beta(x)\ln\alpha(x)},$$

利用等价无穷小替换法则$\ln(1+x)\sim x\quad(x\to 0)$，则

$$\beta(x)\ln\alpha(x)=\frac{\ln(1+\alpha(x)-1)}{\dfrac{1}{\beta(x)}}\sim\frac{\alpha(x)-1}{\dfrac{1}{\beta(x)}},$$

由自然指数函数的连续性，于是

$$\lim\alpha(x)^{\beta(x)}=\lim e^{\frac{\alpha(x)-1}{\frac{1}{\beta(x)}}}=e^{\lim\frac{\alpha(x)-1}{\frac{1}{\beta(x)}}},$$

分别根据不同的条件可得到上述不同的结论.

由以上讨论，上述结论可简记为：已知$\lim\alpha(x)=1$，$\lim\beta(x)=\infty$．若

$$\lim\frac{\alpha(x)-1}{\dfrac{1}{\beta(x)}}=k,\quad -\infty\leqslant k\leqslant+\infty,$$

则$\lim\alpha(x)^{\beta(x)}=e^k$.

注 实际应用时，写成乘积形式$(\alpha(x)-1)\beta(x)$更方便，当$(\alpha(x)-1)\beta(x)\to 0$就是$\alpha(x)\to 1$比$\beta(x)\to\infty$快；$(\alpha(x)-1)\beta(x)\to\infty$就是$\alpha(x)\to 1$比$\beta(x)\to\infty$慢.

3 计算实例

例1 求极限$\lim\limits_{x\to 1+}x^{\frac{2}{(x-1)^p}}$，$(p>0)$．

解 显然，这是1^{∞}形式，当$x\to 1+$时，

(i) 当$p>1$时，由于$x-1$是$\dfrac{(x-1)^p}{2}$的低阶无穷小，说明$x\to 1+$的速度比$\dfrac{2}{(x-1)^p}\to+\infty$的速度慢，故结果为$+\infty$；

(ii) 当$p=1$时，由于$x-1$是$\dfrac{(x-1)^p}{2}$的同阶无穷小，因此结果为e^2；

(iii) 当$0<p<1$时，由于$x-1$是$\dfrac{(x-1)^p}{2}$的高阶无穷小，因此结果为1.

例2 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$．

解 因为

$$\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)x=\frac{2}{\pi}\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)x=-\frac{2}{\pi}x\operatorname{arccot}x\to-\frac{2}{\pi},\quad x\to+\infty,$$

所以,$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x}=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$.

以上计算式中,$\lim\limits_{x\to+\infty}x\operatorname{arccot}x$ 的计算用到了换元 $t=\operatorname{arccot}x$,

$$\lim_{x\to+\infty}x\operatorname{arccot}x=\lim_{t\to0+}\cot t\cdot t=\lim_{t\to0+}\frac{t\cos t}{\sin t}=1.$$

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)/n\right]^{nx}$,其中 $a_1,\cdots,a_n>0$.

解　当 $x\to\infty$ 时,

$$\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}-1\right)\cdot nx=\left(a_1^{\frac{1}{x}}-1\right)x+\left(a_2^{\frac{1}{x}}-1\right)x+\cdots+\left(a_n^{\frac{1}{x}}-1\right)x\to\sum_{i=1}^{n}\ln a_i,$$

其中

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_i^{\frac{1}{x}}-1\right)x=\lim_{x\to\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln a_i}-1\right)x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln a_i\cdot x=\ln a_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

因此,原式$=\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln a_i}=\prod\limits_{i=1}^{n}a_i$.

以上习题,在[1]中被布置用洛必达法则来完成的,但是用洛必达法则需要复杂的求导数运算,比较繁琐.　从本文的解答来看,用定理 1 来解,十分方便.

[参　考　文　献]

[1]　郑洲顺,等.高等数学·上册[M].长沙:中南大学出版社,2014:31－151.

[2]　沐国宝.等价无穷小在求幂指函数极限中的应用[J].上海应用技术学院学报,2(2):2002:139－141.

[3]　程裕强.关于 1^{∞} 型幂指函数极限的快捷方法[J].阜阳师范学院学报(自然科学版),2013,30(2):15－17.

New View on the Limit of Power-exponential Functions

DENG Song-hai,　*YANG Rui-han*,　*WEI Hao-tian*,　*ZHENG Zhou-shun*

(School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: Through three types of infinitesimals, this paper discusses the undetermined type of limit of power-exponential functions and draws useful conclusions. On the basis of speeds of two variables approaching zeros, that is, equivalent, same order, higher order, to analyze the limits. When one of them approaches zero slow, it can be seen as a finite number. Several examples are provided to show the new method.

Key words: limit; power-exponential function; undetermined type