第 27卷第 1期
2007年 3月

数学理论与应用
MATHEMATICAL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 27 No. 1
Mar. 2007

由庞卡莱环域定理导出系统 $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$存在稳定极限环*

倪皖湘
(湖南对外经济贸易职业学院,长沙,410015)
邓松海
(中南大学数学科学与计算学院,长沙,410083)

摘　要　由系统 $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$的内侧轨线找外侧轨线,再由庞卡莱定理推知系统 $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$存在稳定极限环.

关键词　稳定极限环　内侧轨线　外侧轨线

The link territory theorem derives the system $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$ existence stable limit cycle by pang kalai

Ni Wanxiang
(Hunan Foreign Economic Relations Trade College, Changsha, 410015)
Deng Songhai
(Scholl of Mathematical Sceinces and Computing Technology, Central South University, Changsha, 410083)

Abstract　Outside the full text embarks by the system $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$ in boundary- line, found the boundary- line, again the link territory theorem infers the system $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$ existence stable limit cycle by Pang Kalai.

Keywords　central stability limit　realm of the line　line realm

1　引　言

我们知道,一条闭轨线,或者特别地,一个环 Γ,应满足关系式 $\Gamma=K(\Gamma)=A(\Gamma)$,因此,它是一条极限轨线.一个环仅当它至少是一条异于 Γ的轨线 V的 $H(V)$ 或 $A(V)$时,才称为极限环.

一个极限环可以是所有内轨线的极限,也可以是所有外侧轨线的极限;又可以同时是内外

* 袁修贵教授推荐
收稿日期: 2006年 7月 23日

两侧轨线的极限,若不作精确的区分,统称为极限环.如果一个极限环它是内外侧轨线的 $K(V)[A,(V)]$,则称之为稳定极限环.

许多人研究 $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$及 $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$等类型方程存在极限环问题,本质上说都归结为应用环域定理来肯定极限环的存在性,但对不同的方程仍有不同的技巧.本文主要给出 $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$型方程存在稳定极限环的一种证明方法.

设方程 $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$中的 $f(x,v)$, $g(x)$ 满足条件:

(1) $xg(x)>0$,当 $|x|>0$时,定义 $a(x)=\int_0^x g(x)dx$,假设 $G(\pm\infty)=+\infty$,

(2) $f(0,0)<0$;

(3) 存在 $x_0>0$,使当 $|x|\geq x_0$时, $f(x,v)\geq 0$.又存在 $M>0$,使当 $|x|\leq x_0$时,有 $f(x,v)>-M$,

(4) 存在 $x_1>x_0$使对 x 的任一减少的正函数 $v(x)$ 都有:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,v)dx\geq 4Mx_0+a,\ (a>0),$$

则方程 $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$存在稳定极限环.

证明 研究与 $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$等价的方程组:

$$\begin{cases} dx/dt=v \\ dv/dt=-f(x,v)v-g(x) \end{cases}$$

记 $\lambda(x,v)=\frac{1}{2}v^2+G(x)=\frac{1}{2}v^2+\int_0^x g(x)dx$,由条件 (1) $xg(x)>0$, $|x|>0$时知, $\lambda(x,v)=C\ (C>0)$,表示一族包含原点的闭曲线,由条件 (2) $f(0,0)<0$知,在原点附近: $\frac{d\lambda}{dt}=v\frac{dv}{dt}+g(x)\frac{dx}{dt}=v[-f(x,v)v-g(x)]+g(x)v=-v^2f(x,v)\geq 0$,故可取很小的 $C_1>0$,使在 $\lambda(x,v)=C_1$上处处有$\frac{d\lambda}{dt}\geq 0$.此闭曲线可取作环域的内侧轨线(注:一切与 $\lambda(x,v)=C_1$相交产生的轨线都从内部穿到外部).

应用环域定理,下面找外侧轨线.

因为:$\begin{cases} \dot{x}=v \\ \dot{v}=-f(x,v)v-g(x) \end{cases}$的唯一奇点为 $(0,0)$.从直线 $x=x_0$上一点 $A_0(x_0,a)\ (a>0)$ 出发的轨线 V,由条件 (3) 知在 $x=x_0$ 右方有:

$$\frac{d\lambda}{dt}=-v^2f(x,v)\leq 0,$$

但奇点唯一,故 V必与 x轴相交,再由 $x=x_0$交于 A_3.由于 a取得很大,不妨设 V也与 $x=x_0$交于两点 A_1, A_2,当 $|x|\leq x_0$ 时,由条件 (2) 知

$$\frac{dv}{dx}=-f(x,v)-\frac{g(x)}{v}\leq M+\frac{\max\limits_{|x|\leq x_0}|g(x)|}{|v|}<M+1,$$

当 $|v|>\max\limits_{|x|\leq x_0}|g(x)|$.另一方面由前面已做出环域的内侧轨线以及 $\frac{dv}{dt}\Big|_{v=0}=-g(x)$,可知 V在 A_3以后必将与负 v轴相交,而进入左半平面,此后它或是在 $x=-x_0$的右方穿过负 x轴

而进入第二象限,或是在 A_4穿过 $x=-x_0$.但在 $x=-x_0$左方又有$\frac{d\lambda}{dt}\leq 0$,故 V后来仍与负 x轴相交然后回头再交 $x=-x_0$于 A_5.在上半平面同样证明得 V将穿过正 v轴然后再与 $x=x_0$交于一点 A_0.

下面证明只要 $a<0$取得足够大,就可使 A_0位于 A_0的下方.这时 V上从 A_0到 A_6的弧段以及直线段$\overline{A_0A_6}$就构成了外侧轨线.

先证对任一已给正数 N,总可取的 A_0纵坐标 $a>N$足够大,使得弧$A_0A_1\cdots A_6$能与 $x=x_1$相交,并且它们位于带域 $-x_0\leq x\leq x_1$内的部分都在直线 $v=N$的上方或在 $v=N$的下方.

事实上,若 V自 A_0以后不与 $x=x_1$相交,则可改取从 $A'_1(x_1,a')$ $(a'>a)$ 出发的轨线 V′代替 V.当 t增加时仍与 V一样绕原点转,如 果 V′当 t减少时能与 $x=x_1$相交最好.

否则 V′负半轨必在 $x=x_0$右方趋向无限远(因为$\frac{dx}{dt}>0,\frac{dv}{dt}<0$)这时可算作 $A'_0=\infty$,而 A'_6必在 A'_0的下方,定理已证得.仿此,例如,若 A_3位于 $v=-N$的上方,那么就可取 $A''_3(x_0,-N-1)$出发的轨线 V″代替 V等等.

以 v_i记 A_i的纵坐标,现在来估计 v_6,利用条件(4)可得:

$$\begin{aligned} v_1-v_0&=-\int_{x_0}^{x_1}f(x,v)dx-\int_{x_0}^{x_1}\frac{g(x)}{v}dx\\ &<-\int_{x_0}^{x_1}f(x,v)dx\\ &\leq-4Mx_0-a \end{aligned}\tag{1.1}$$

沿 A_1A_2,$\lambda(x,v)$随 t增加而减少,$G(x)$在 A_1,A_2有相同的数值,故知:

$$|v_2|\leq 0\tag{1.2}$$

沿 A_2A_3,$\lambda(x,v)$随 t增加而减少,故:

$$\frac{1}{2}v_3^2+G(x_0)\leq\frac{1}{2}v_2^2+G(x_1)v_3^2-v_2^2\leq 2[G(x_1)-G(x_0)]$$

$$|v_3|-|v_2|\leq\frac{2[G(x_1)-G(x_0)]}{|v_3|+|v_2|}<\frac{G(x_1)-G(x_0)}{N}\tag{1.3}$$

注:$\because$ $v_3,v_2<0,(v_3+v_2)(v_3-v_2)\leq 2[G(x_1)-G(x_0)]$

$$\begin{aligned} |v_3|-|v_2|&\leq|v_3-v_2|\leq\frac{2[G(x_1)-G(x_0)]}{|v_3|+|v_2|}\\ &=\frac{2[G((x_1)-G(x_0)]}{|v_3|+|v_2|}<\frac{G(x_1)-G(x_0)}{N} \end{aligned}$$

对于弧 A_3A_4有:

$$\begin{aligned} v_4-v_3&=-\int_{x_0}^{-x_0}f(x,v)dx-\int_{x_0}^{-x_0}\frac{g(x)}{v}dx\\ &=\int_{x_0}^{-x_0}f(x,v)dx+\int_{-x_0}^{0}\frac{g(x)}{v}dx \end{aligned}$$

由条件(3)

$$|v_4|-|v_3|\leq|v_4-v_3|$$
$$\leq\int_{-x_0}^{x_0}|f(x,v)|\,dx+\int_0^{x_0}\left|\frac{g(x)}{v}\right|dx\int_0^{-x_0}\left|\frac{-g(x)}{v}\right|dx$$
$$<2Mx_0+\frac{1}{N}G(x_0)+\frac{1}{N}G(-x_0)\qquad(1.4)$$

沿 A_4A_5 有 $\frac{d\lambda}{dt}\leq 0$,故 $v_5-|v_4|\leq 0$　(1.5)

对于 A_5A_6 有

$$v_0-v_5=-\int_{-x_0}^{x_0}f(x,v)dx-\int_{-x_0}^{x_0}\frac{g(x)}{v}dx$$
$$=-\int_{-x_0}^{x_0}f(x,v)dx\int_{-x_0}^{0}\frac{g(x)}{v}dx-\int_0^{x_0}\frac{g(x)}{v}dx$$
$$<2Mx_0+\frac{1}{N}G(-x_0)-\frac{1}{N}G(x_0)\qquad(1.6)$$

把(1.1)到(1.6)式相加,可得:

$$v_6-v_0<-a+\frac{G(x_1)-G(x_0)+aG(-x_0)}{N}.$$

只要取 $N>\frac{1}{a}[G(x_1)-G(x_0)+aG(-x_0)]$,就有 $v_6+v_0<0$.

这样的外侧轨线已找到,由庞卡莱环域定理知系统

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$$

存在稳定极限环.

参考文献

[1] 王　联等. 常微分方程理论及其应用. 科学出版社. 1989年.

[2] (意) G° 桑森° R康蒂. 非线性微分方程. 科学出版社. 1999年.